電験どうでしょう管理人
KWG presents

電験オンライン塾

第13回　電気数学
複素数（3）

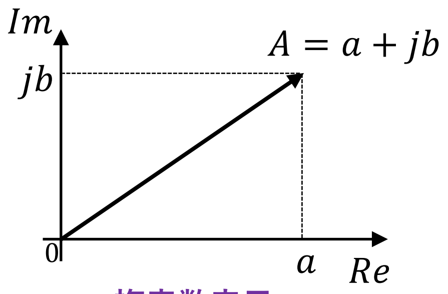
2022.12.04 Sun

複素数の表現(複素数表示とフェーザ表示)

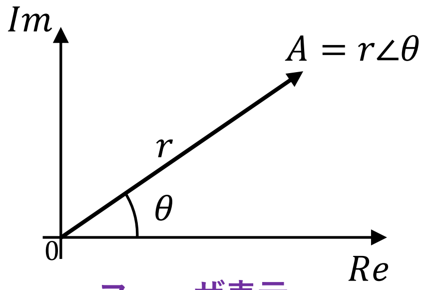
複素数$A=a+jb$という表現を複素数表示というのに対し、複素数の絶対値と実軸を基準にした角度で複素数を表現することをフェーザ表示という。

$$A=a+jb \quad \leftrightarrow \quad A=r\angle\theta$$

複素数表示　　フェーザ表示



複素数表示



フェーザ表示

複素数表示とフェーザ表示は同じ意味を持ち、互いの表現に変換することが可能

＜複素数表示からフェーザ表示＞

$A=a+jb$ をフェーザ表示に変換する

$$r=|A|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a}=\tan\theta$$

$$A=r\angle\theta=\sqrt{a^2+b^2}\angle\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

＜フェーザ表示から複素数表示＞

$A=r\angle\theta$を複素数表示に変換する

$$a=r\cos\theta$$

$$b=r\sin\theta$$

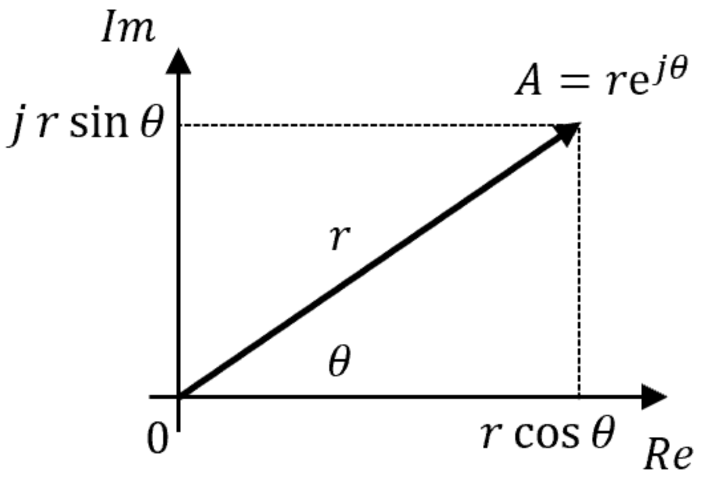
$$A=a+jb=r(\cos\theta+j\sin\theta)$$

オイラーの公式と指数関数表示

〇オイラーの公式

絶対値 1の複素数$z = \cos\theta + j\sin\theta$において、偏角$\theta$を示す絶対値 1の指数関数$f(\theta) = \mathrm{e}^{j\theta}$が存在し、この条件を満たす定数 $\mathrm{e} = 2.718\cdots$ はネイピア数と呼ばれる。ネイピア数により以下の関係式が成り立つ。

$$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\ \sin\theta$$



オイラーの公式を用いた複素数の表現を指数関数表示という。
$A = r\angle\theta$を指数関数表示で表現すると、

$$A = r\mathrm{e}^{j\theta}$$

複素数表示、フェーザ表示、指数関数表示の関係は以下のようになる。

$$A = r\cos\theta + jr\sin\theta \leftrightarrow A = r\angle\theta \leftrightarrow A = r\mathrm{e}^{j\theta}$$

複素数表示　フェーザ表示　指数関数表示

指数法則

$a \neq 0,\ b \neq 0$で$m,\ n$が正の整数のとき、以下の指数法則が成り立つ。

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad a^0 = 1 \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

指数関数表示に適用すると、

$$\mathrm{e}^{j\theta_1}\mathrm{e}^{j\theta_2} = \mathrm{e}^{j(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{\mathrm{e}^{j\theta_1}}{\mathrm{e}^{j\theta_2}} = \mathrm{e}^{j(\theta_1-\theta_2)} \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{j\theta_1}} = \mathrm{e}^{-j\theta_1}$$

$$\left(\mathrm{e}^{j\theta_1}\right)^n = \mathrm{e}^{jn\theta_1} \qquad \frac{1}{(\mathrm{e}^{j\theta_1})^n} = \mathrm{e}^{-jn\theta_1} \qquad \mathrm{e}^{j0} = 1$$

練習問題 I

以下の計算について、空欄を埋めよ。

（1） 4×16

$= 2^{(\ \ )}\times 2^{(\ \ )}$

$= 2^{(\ \ )+(\ \ )}$

$= 2^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

（2） 27×9

$= 3^{(\ \ )}\times 3^{(\ \ )}$

$= 3^{(\ \ )+(\ \ )}$

$= 3^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

（3） 6×9

$= 2\times 3^{(\ \ )}\times 3^{(\ \ )}$

$= 2\times 3^{(\ \ )+(\ \ )}$

$= 2\times 3^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

（4） 6×32

$= 3\times 2^{(\ \ )}\times 2^{(\ \ )}$

$= 3\times 2^{(\ \ )+(\ \ )}$

$= 3\times 2^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

（5） $64\div 8$

$= 2^{(\ \ )}\div 2^{(\ \ )}$

$= 2^{(\ \ )-(\ \ )}$

$= 2^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

（6） $81\div 27$

$= 3^{(\ \ )}\div 3^{(\ \ )}$

$= 3^{(\ \ )-(\ \ )}$

$= 3^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

（7） $162\div 9$

$= 2\times 3^{(\ \ )}\div 3^{(\ \ )}$

$= 2\times 3^{(\ \ )-(\ \ )}$

$= 2\times 3^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

（8） $18\div 27$

$= 2\times 3^{(\ \ )}\div 3^{(\ \ )}$

$= 2\times 3^{(\ \ )-(\ \ )}$

$= 2\times 3^{(\ \ )}$

$= \boxed{}$

練習問題１（解答）

以下の計算について、空欄を埋めよ。

（１） 4×16

$= 2^2 \times 2^4$

$= 2^{(2)+(4)}$

$= 2^6$

$= 64$

（２） 27×9

$= 3^3 \times 3^2$

$= 3^{(3)+(2)}$

$= 3^5$

$= \boxed{243}$

（３） 6×9

$= 2 \times 3^1 \times 3^2$

$= 2 \times 3^{(1)+(2)}$

$= 2 \times 3^3$

$= \boxed{54}$

（４） 6×32

$= 3 \times 2^1 \times 2^5$

$= 3 \times 2^{(1)+(5)}$

$= 3 \times 2^6$

$= \boxed{192}$

（５） $64 \div 8$

$= 2^6 \div 2^3$

$= 2^{(6)-(3)}$

$= 2^3$

$= \boxed{8}$

（６） $81 \div 27$

$= 3^4 \div 3^3$

$= 3^{(4)-(3)}$

$= 3^1$

$= \boxed{3}$

（７） $162 \div 9$

$= 2 \times 3^4 \div 3^2$

$= 2 \times 3^{(4)-(2)}$

$= 2 \times 3^2$

$= \boxed{18}$

（８） $18 \div 27$

$= 2 \times 3^2 \div 3^3$

$= 2 \times 3^{(2)-(3)}$

$= 2 \times 3^{-1}$

$= \boxed{2/3}$

練習問題2

以下の複素数を指数関数表示で示せ。ここで$z_1=\mathrm{e}^{j\theta_1}$、$z_2=\mathrm{e}^{j\theta_2}$とする。

（1） $z_1 z_1$

（2） $z_1 z_1 z_1$

（3） z_1^5

（4） $z_1 z_1 z_2$

（5） $z_1^3 z_2^4$

（6） $\dfrac{z_1}{z_2 z_2}$

（7） $\dfrac{1}{z_1 z_2}$

（8） $\dfrac{1}{z_1^3}$

練習問題２（解答）

以下の複素数を指数関数表示で示せ。ここで$z_1 = \mathrm{e}^{j\theta_1}$、$z_2 = \mathrm{e}^{j\theta_2}$とする。

（１） $z_1 z_1$

$= \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1}$

$= \mathrm{e}^{j2\theta_1}$

（２） $z_1 z_1 z_1$

$= \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1}$

$= \mathrm{e}^{j3\theta_1}$

（３） z_1^5

$= \mathrm{e}^{j5\theta_1}$

（４） $z_1 z_1 z_2$

$= \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_2}$

$= \mathrm{e}^{j(2\theta_1+\theta_2)}$

（５） $z_1^3 z_2^4$

$= \mathrm{e}^{j(3\theta_1+4\theta_2)}$

（６） $\dfrac{z_1}{z_2 z_2}$

$= \dfrac{\mathrm{e}^{j\theta_1}}{\mathrm{e}^{j\theta_2} \times \mathrm{e}^{j\theta_2}}$

$= \mathrm{e}^{j(\theta_1-2\theta_2)}$

（７） $\dfrac{1}{z_1 z_2}$

$= \dfrac{1}{\mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_2}}$

$= \mathrm{e}^{-j(\theta_1+\theta_2)}$

（８） $\dfrac{1}{z_1^3}$

$= \dfrac{1}{\mathrm{e}^{j3\theta_1}}$

$= \mathrm{e}^{-j3\theta_1}$

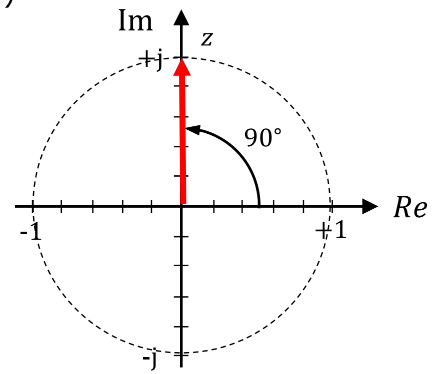
練習問題3

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

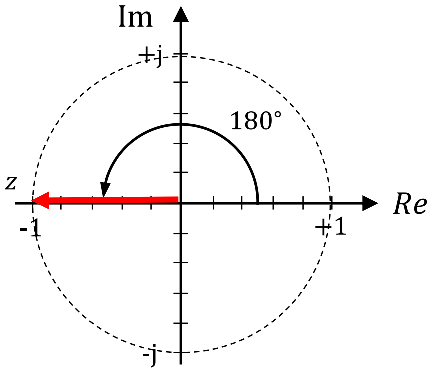
オイラーの公式を用いて、複素数表示と指数関数表示で以下のzを示せ。

（1）



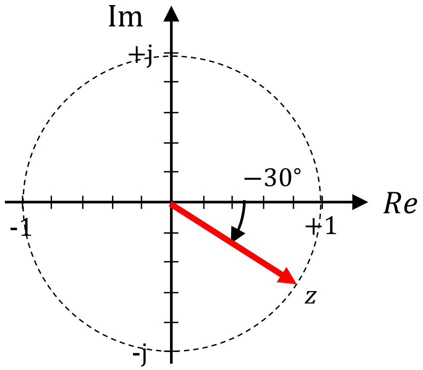
Ans. 複素数表示：　　　　指数関数表示：

（2）



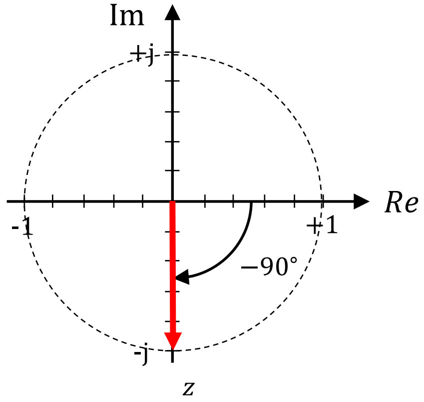
Ans. 複素数表示：　　　　指数関数表示：

（3）



Ans. 複素数表示：　　　　指数関数表示：

（4）



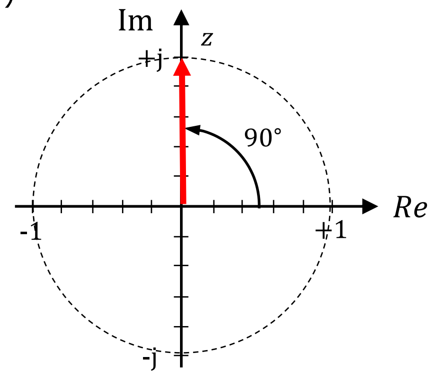
Ans. 複素数表示：　　　　指数関数表示：

練習問題3（解答）

オイラーの公式
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\ \sin\theta$

オイラーの公式を用いて、複素数表示と指数関数表示で以下のzを示せ。

（1）

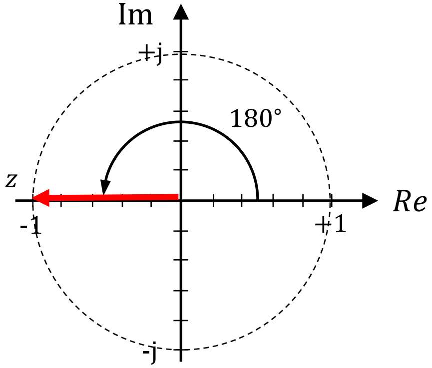


$$z = \cos 90° + j\ \sin 90° \\ = 0 + j$$

$$z = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Ans. 複素数表示：$z = j$　指数関数表示：$z = e^{j\frac{\pi}{2}}$

（2）

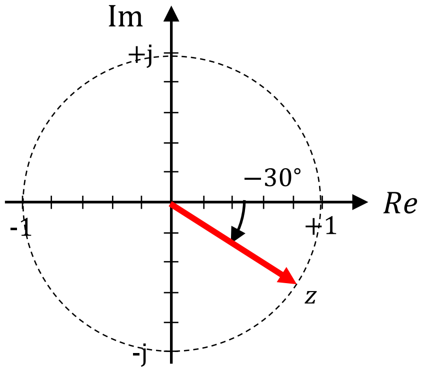


$$z = \cos 180° + j\ \sin 180° \\ = -1 + j0$$

$$z = e^{j\pi}$$

Ans. 複素数表示：$z = -1$　指数関数表示：$z = e^{j\pi}$

（3）

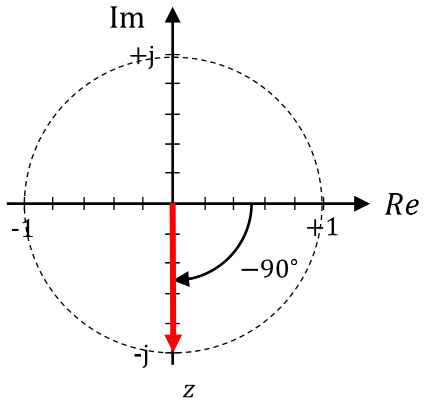


$$z = \cos(-30°) + j\ \sin(-30°) \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$z = e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

Ans. 複素数表示：$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$　指数関数表示：$z = e^{-j\frac{\pi}{6}}$

（4）



$$z = \cos(-90°) + j\ \sin(-90°) \\ = 0 - j$$

$$z = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Ans. 複素数表示：$z = -j$　指数関数表示：$z = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

練習問題4

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（1） $z = e^{j\pi/4}$

Ans. $z =$ ______

（2） $z = e^{j\pi/3}$

Ans. $z =$ ______

（3） $z = e^{j\pi/2}$

Ans. $z =$ ______

（4） $z = e^{j\pi}$

Ans. $z =$ ______

（5） $z = e^{-j\pi/6}$

Ans. $z =$ ______

（6） $z = e^{-j\pi/2}$

Ans. $z =$ ______

練習問題4（解答）

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（1） $z = e^{j\pi/4}$

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ans. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

（2） $z = e^{j\pi/3}$

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ans. $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

（3） $z = e^{j\pi/2}$

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= j$$

Ans. $z = j$

（4） $z = e^{j\pi}$

$$z = \cos\pi + j\sin\pi$$
$$= -1$$

Ans. $z = -1$

（5） $z = e^{-j\pi/6}$

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$$

Ans. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$

（6） $z = e^{-j\pi/2}$

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -j$$

Ans. $z = -j$

練習問題5

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（1）　$z = e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{4}}$

Ans.　$z =$

（2）　$z = e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{\pi}{2}}$

Ans.　$z =$

（3）　$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{6}}$

Ans.　$z =$

（4）　$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Ans.　$z =$

（5）　$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$

Ans.　$z =$

（6）　$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Ans.　$z =$

練習問題5（解答）

オイラーの公式
$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（1）
$$z=e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{4}}$$
$$z=e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=j$$

Ans. $z=j$

（2）
$$z=e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$z=e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j\frac{5\pi}{6}}$$
$$=\cos\frac{5\pi}{6}+j\sin\frac{5\pi}{6}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}$$

Ans. $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}$

（3）
$$z=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{6}}$$
$$z=e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{j\frac{4\pi}{6}}=e^{j\frac{2\pi}{3}}$$
$$=\cos\frac{2\pi}{3}+j\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ans. $z=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

（4）
$$z=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$
$$z=e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{j\frac{\pi}{4}}$$
$$=\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ans. $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}$

（5）
$$z=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$
$$z=e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{j\frac{2\pi}{6}}=e^{j\frac{\pi}{3}}$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ans. $z=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

（6）
$$z=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
$$z=e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{0}$$
$$=1$$

Ans. $z=1$

ご聴講ありがとうございました!!